Vektorgeometrie ganz einfach

Teil 3

Heft 3: Das Wichtigste über Ebenen

Ganz einfache Erklärung der Grundlagen:

Die wichtigsten Aufgabenstellungen und Methoden-

Datei Nr. 63200

Stand 16. April 2012

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort !!!

Es gibt nun mehrere Texte zum Thema Geraden und Vektorrechnung. Dieser Text mit dem Zusatztitel „ganz einfach" ist ein praktisch ausgerichteter Text mit Musterbeispielen und Aufgaben.
Die Methoden werden nicht hergeleitet sondern nur beschrieben und vorgeführt. Schüler, die wiederholen und auf eine Klausur oder eine Prüfung lernen, finden hier eine ausführliche Übersicht und können sich rasch nochmals über alles informieren. Zum Lernen der Hintergründe sollte man auf die bisherigen Texte zurückgreifen: 63020 bis 63023
Die Beispiele und Aufgaben dieses Textes wurden als eigene Aufgabensammlung unter der Nummer 63201 zusammengestellt. Übrigens: GA heißt Grundaufgabe.

Inhalt

1. Vektorielle Ebenengleichung: *Punkt-Richtungs-Gleichung auch Parametergleichung genannt.*

1.1 Was ist eine vektorielle Ebenengleichung wirklich? (Wichtige Theorie!)

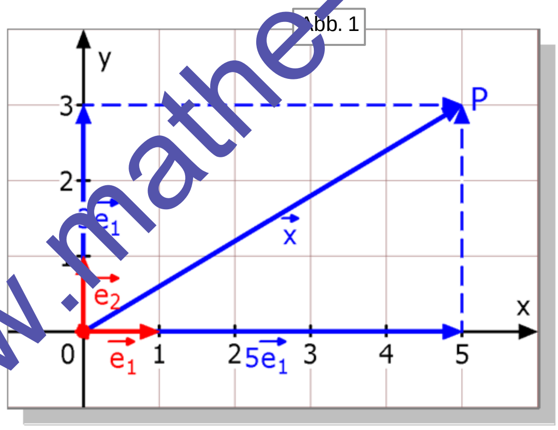
Jetzt sollte man über Ortvektoren von Punkten Bescheid wissen. Im Text 61120 wurden diese Grundlagen erklärt, und zwar auf Seite 16 (Ortsvektoren) und auf Seite 17, wie man mittels Vektoren neue Punkte berechnen kann. Wichtig ist dabei, dass man weiß, dass man nicht mit Punkten rechnen kann. Statt mit Punkten rechnet man mit deren Ortsvektoren.

Thema: Wir berechnet man die Ortsvektoren der Punkte, die auf einer Ebene liegen?

In einer Ebene kann man jedem Punkt zwei Koordinaten zuordnen. Abb. 1 zeigt den Punkt $P(5|3)$ und seinen Ortsvektor, der immer dieselben Koordinaten hat:

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dies ist die abgekürzte Schreibweise für

$\overrightarrow{OP} = 5 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2$. Dabei sind $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ die beiden Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems. Sie stehen aufeinander senkrecht und haben die Länge 1.

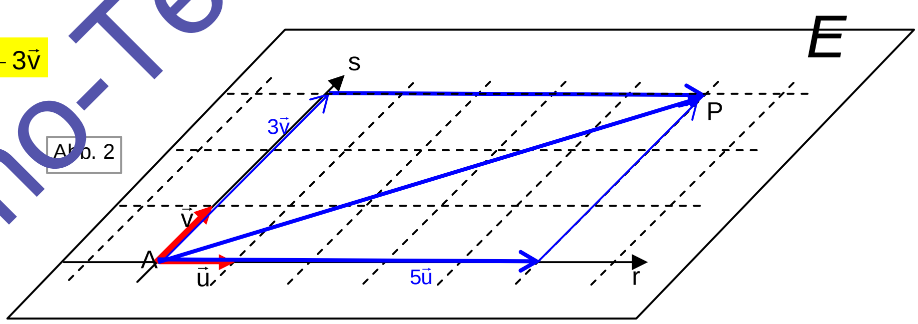


Man sollte diesen schwierigen Satz wissen:

Die **Koordinaten** eines Punktes sind die **Koeffizienten** der Linearkombination des Ortsvektors mit den beiden Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$. (Im Raum sind es 3 Koordinaten und 3 Basisvektoren.)

Die Richtungsvektoren einer Ebene müssen nicht orthogonal zueinander sein, und sie müssen auch nicht die Länge 1 haben. Die nächste Abbildung zeigt ein Beispiel, wo sie $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen.

$\overrightarrow{AP} = 5\vec{u} + 3\vec{v}$



Hier ist der Eindruck, dass man schräg auf eine Ebene blickt, durchaus angemessen, denn sie kann ja wirklich irgendwie schräg im Raum liegen. Im Grunde könnte es dieselbe Ebene wie in Abb. 1 sein, eben mit anderen Bezeichnungen, denn sie soll ja jetzt eingebettet sein in den Raum.

Um das besser erkennen zu können, stellen wir dieselbe Ebene im x-y-z-Koordinatensystem dar.

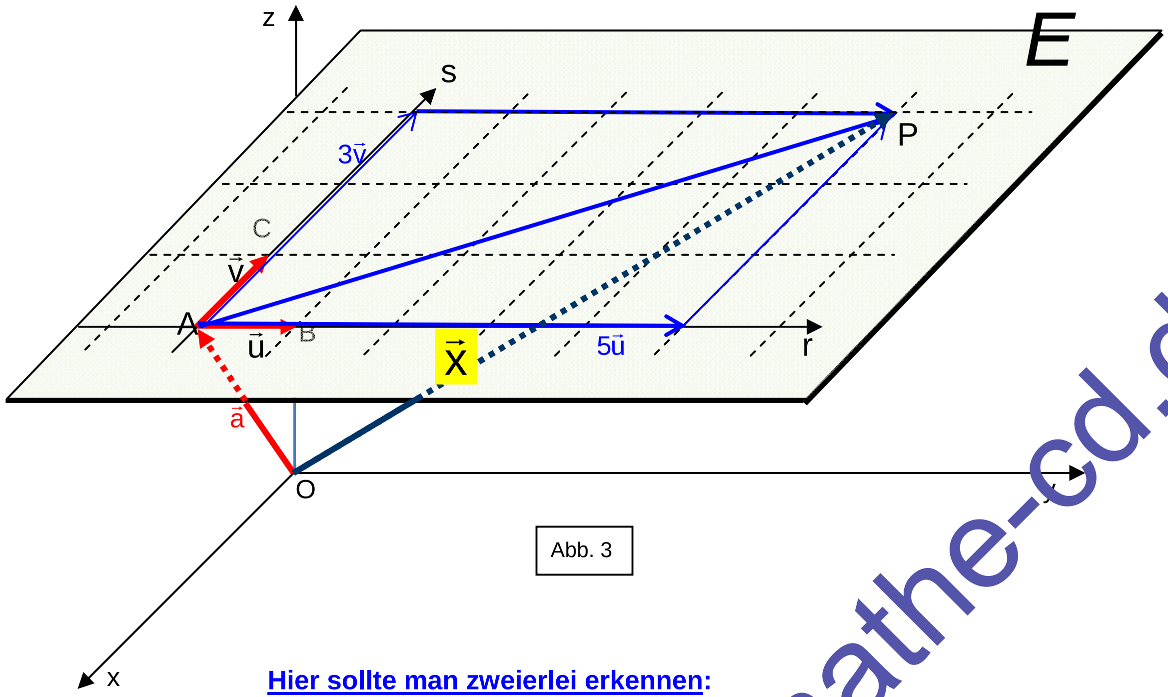


Abb. 3

<u>Hier sollte man zweierlei erkennen</u>:

1. <u>Innerhalb der Ebene</u> erzeugen die Basisvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein zweidimensionales Koordinatensystem. Damit kann man jeden Punkt durch zwei (jetzt sagt man besser) Parameter festgelegt, die jetzt r und s heißen: $\overrightarrow{AP} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, zum Beispiel $\overrightarrow{AP} = 5\vec{u} + 3\vec{v}$. Hinsichtlich des Raumes, in den die Ebene eingebettet ist, hat jeder Punkt drei Raumkoordinaten $P(x\,|\,y\,|\,z)$ oder $P(x_1\,|\,x_2\,|\,x_3)$ und einen Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

2. Man kann die ebeneninterne Darstellung mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ natürlich an das Raumkoordinatensystem ankoppeln. Dazu benötigt man einen Bezugspunkt in der Ebene, man nennt ihn auch den Aufpunkt A der Ebene.
Innerhalb der Ebene gilt: $\overrightarrow{AP} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ (1)
Und im Raum gilt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ (2).
Setzt man (1) in (2) ein: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ bzw. $\boxed{\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}}$ (3)

(3) ist eine <u>Berechnungsgleichung für Ortsvektoren von Ebenenpunkten</u>.
Man nennt sie *Parametergleichung* (weil die Parameter r und s darin stehen) oder *Punkt-Richtungs-Gleichung* (weil ein Aufpunkt A bzw. sein Ortsvektor $\vec{a}$ und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darin vorkommen).

<u>Achtung:</u> Die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ müssen verschiedene Richtungen haben, dürfen also nicht kollinear sein, also keine Vielfachen voneinander.

1.2 Ebenengleichung aufstellen und einen Punkt der Ebene berechnen

Grundaufgabe 1: Gegeben sind ein Punkt einer Ebene und zwei Richtungsvektoren.

Gegeben seien $A(1|4|-4)$ und die Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Innerhalb der Ebene ist ein Punkt P durch die Parameterwerte $r = 5$ und $s = 3$ festgelegt. (Das entspricht genau der Abbildung 3 der Seite zuvor). Berechne seine Raumkoordinaten.

Lösung

Die Punkt-Richtungs-Form der Ebene lautet allgemein: $\boxed{\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}}$

Mit den angegebenen Werten lautet sie: $\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$

Berechnung des Ortsvektors von P mittels $r = 5$ und $s = 3$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+15-3 \\ 4-10+6 \\ -4+25+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: Der zu diesem Ortsvektor gehörende Punkt ist $P(13|9|30)$.

Hinweis 1: Die Parameterwerte $r = 5$ und $s = 3$ sind praktisch die beiden „Koordinaten" für P innerhalb des Ebenensystems, das durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gebildet wird. Man könnte das auch so ausdrücken: $P[5;3]$ und hätte dann eine Analogie zur x-y-Darstellung!

Relativ zum Raum-Koordinatensystem aber verwendet man die x-y-z-Koordinaten und schreibt dann: $P(13|9|30)$

Hinweis 2: Wir wollen uns noch drei spezielle Punkte anschauen:

Für r = 0 und s = 0: $\vec{x} = \vec{a} + 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} = \vec{a}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}: \text{ Punkt } A(1|4|-4)$$

Für r = 1 und s = 0: $\vec{x} = \vec{a} + 1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} = \vec{a} + \vec{u} = \vec{b}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}: \text{ Punkt } B(4|2|1)$$

Für r = 0 und s = 1: $\vec{x} = \vec{a} + 0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} = \vec{a} + \vec{v} = \vec{c}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}: \text{ Punkt } C(0|6|-1)$$

Grundaufgabe 2: Gegeben sind 3 Punkte einer Ebene. Stelle ihre Parametergleichung auf

Gegeben sind $A(1|4|-4)$, $B(0|3|1)$ und $C(6|-1|6)$

Lösung

Eine Ebenengleichung in der Punkt-Richtungsform benötigt einen Aufpunkt und zwei nicht kollineare Richtungsvektoren: $\boxed{\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}}$

Es gibt viele Möglichkeiten, für eine Ebene eine Gleichung aufzustellen:

1. Möglichkeit: Ich wähle $A(1|4|-4)$ als Aufpunkt

und als Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

sowie $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

ACHTUNG: Jetzt muss man kontrollieren, ob $\vec{u}$ ein Vielfaches von $\vec{v}$ ist (oder umgekehrt). (Wäre dies so, könnten man $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht als Richtungsvektoren verwenden!)

Hier ist dies nicht der Fall, denn sonst müssten bei $\vec{v}$ auch die ersten beiden Koordinaten gleich sein. Also haben $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht die gleiche Richtung, d. h. sie sind nicht kollinear, und können daher als Richtungsvektoren für eine Ebene Verwendung finden.

Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ (E1)

In Abbildung 4 sehen wir eine Darstellung der Ebene E mit den drei Punkten. (Nicht maßstäblich).
In Abbildung 5 wurden die Richtungsvektoren sowie der Ortsvektor $\vec{a}$ des Aufpunkts A eingezeichnet.
P ist ein beliebiger Punkt in E, dessen Ortsvektor $\vec{x}$ durch die Summe $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ berechnet werden kann, das ist die gesuchte Ebenengleichung.

Abb. 4

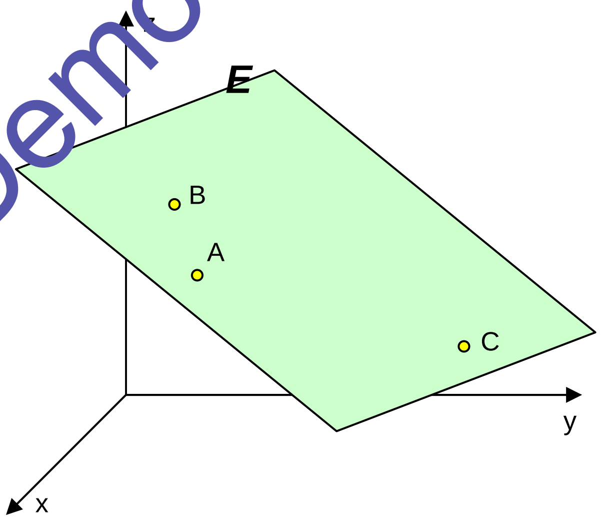
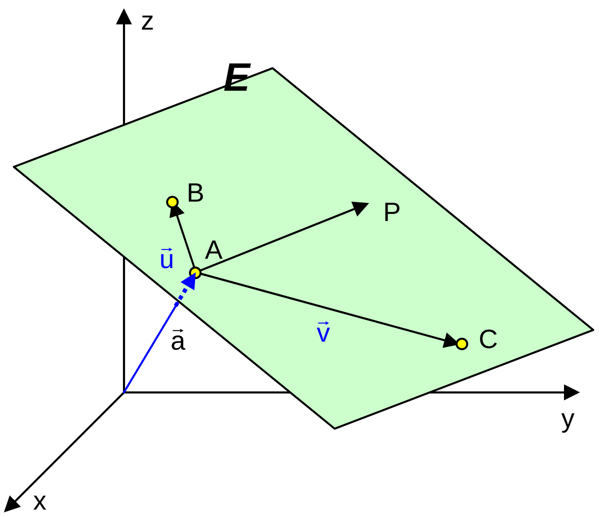


Abb. 5



2. Möglichkeit: „Kürzere“ Richtungsvektoren verwenden

Da es bei einem Richtungsvektor nicht sauf seine Länge ankommt, sondern nur auf seine Richtung, können wir statt $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ auch $\vec{v} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verwenden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(E2)}$$

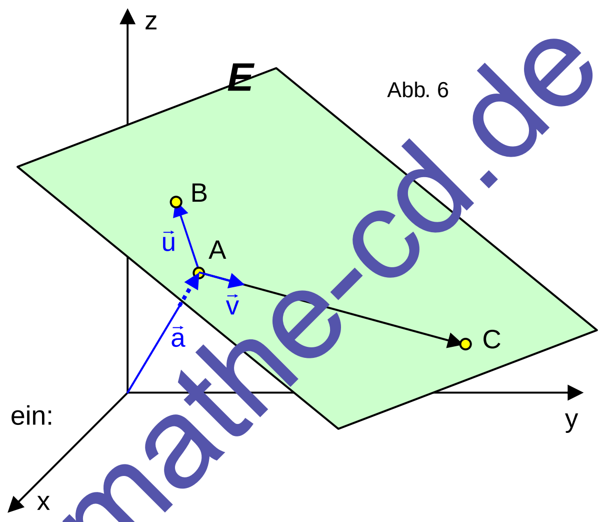


Abb. 6

Dies hat „nur“ die Auswirkung, dass man für einen bestimmten Punkt einen anderen t-Wert benötigt.

Beispiel dazu:

In $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ setzen wir $r = -1$ und $s = 2$ ein:

Das ergibt $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$, also $P_1(12\,|\,-5\,|\,11)$

Will man denslben Punkt aus der Gleichung (E2) mit dem verkürzten Richtungsvektor berechnen, benötigt man $r = -1$ und $t = 10$: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$

---

3. Möglichkeit: Für dieselbe Ebene wähle sei $B(0\,|\,3\,|\,1)$ der Aufpunkt und die Richtungsvektoren

$$\vec{u} = \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

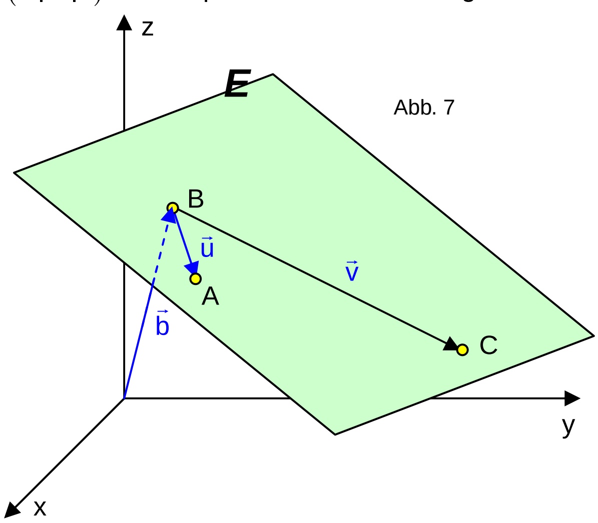


Abb. 7

Damit sieht die Ebenengleichung so aus:

$\vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \text{(E3)}$$

Den oben berechneten Ebenenpunkt $P_1(12\,|\,-5\,|\,11)$ erhält man hier übrigens

mit $r = 2$ und $s = 0$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \cancel{0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Wie man diese Werte für r und s findet, lernt man in Grundaufgabe 5.

Man könnte noch weitere Gleichungen für dieselbe Ebene aufstellen …

Grundaufgabe 3: Überprüfe, ob die Punkte A, B und C eindeutig eine Ebene festlegen:

a) $A(1|4|-4)$, $B(0|3|1)$ und $C(6|-1|6)$

b) $A(1|4|-4)$, $B(0|3|1)$ und $C(-1|0|-16)$

WISSEN: Drei Punkte legen genau dann eine Ebene eindeutig fest, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen.

Dies ist genau dann der Fall, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ nicht dieselbe Richtung haben, also keine Vielfachen voneinander sind (man sagt: „nicht kollinear sind").

An Stelle dieser beiden Vektoren kann man auch $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ usw. nehmen.

METHODE: Untersuche, ob $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ ist oder umgekehrt.

Lösung

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Dass $\overrightarrow{AC}$ kein Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$ sein kann, erkennt man hier an den Vorzeichen:

Die ersten beiden Koordinaten von $\overrightarrow{AB}$ sind gleich. Und sie sind es dann auch bei jedem Vielfachen von $\overrightarrow{AB}$.

Wer es lieber ausrechnen möchte, macht diesen Ansatz:

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 5 = -k \\ -5 = -k \\ 10 = 5k \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Aus dieser Vektorgleichung wird also ein System aus 3 Gleichungen.

Gleichung (1) liefert: $k = -5$,

Gleichung (2) liefert: $k = 5$,

Gleichung (3) liefert: $k = 2$.

Da es hier keine einheitliche Lösung gibt, ist $\overrightarrow{AC}$ kein Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$.

Folglich legen A, B und C eindeutig eine Ebene fest.

b) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

Hier kann sofort erkennen: $\overrightarrow{AC} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$ Oder man rechnet es aus:

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 2 = -k \\ 2 = -k \\ -10 = 5k \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{matrix} \right\} \quad !$$

A, B und C liegen also auf einer Geraden. Daher gibt es unendlich viele Ebenen durch A, B, C.

Grundaufgabe 4:

Für welches $t \in \mathbf{R}$ definieren $A(3\,|\,5\,|\,0)$, $B(6\,|\,-1\,|\,-3)$ und $C_t(5\,|\,t-1\,|\,-t)$ eindeutig eine Ebene?

Lösung

Man überprüft, für welchen Wert von t die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC_t}$ die gleiche Richtung haben.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC_t} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ t-1 \\ -t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t-6 \\ -t \end{pmatrix}$$

Zunächst sei darauf hingewiesen, dass man ab jetzt mit $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ weiterrechnet. Er hat die gleiche Richtung wie $\overrightarrow{AB}$! Die Frage heißt jetzt:

Für welches t gilt: $\overrightarrow{AC_t} = k \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \iff \begin{pmatrix} 2 \\ t-6 \\ -t \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} 2 = k \\ t-6 = -2k \\ -t = -k \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$

(1) sagt uns schon: $k = 2$ (4)

k in (3) ersetzen: $-t = -2 \iff t = 2$

Probe in (2): $2 - 6 = -4$ Wahre Aussage.

Hinweis:

> Da wir für 2 Unbekannte k und t drei Gleichungen haben, reichen zwei davon zur Berechnung. Da die Lösung auch die dritte Gleichung lösen muss, ist es notwendig, in ihr die Probe zu machen. Erst diese entscheidet darüber, ob die gefundenen Werte für k und t wirkliche Lösungen sind!

Ergebnis: Für $t = 2$ liegen die drei Punkte A, B, C_t (also C_2) auf einer Geraden.
Für $t \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ definieren sie daher eindeutig eine Ebene.

1.3 Grundaufgabe 5: Liegt ein Punkt in einer gegebenen Ebene?

Wir lösen die Aufgabe „Liegt $P_1(12\,|-5\,|\,11)$ in der Ebene E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$ auf 3 Arten.

Die erste Methode heißt Punktprobenmethode:

Überlegung: Die Gleichung $\boxed{\vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}}$ dient der Berechnung von Punkten der Ebene:

Für r und s je eine Zahl einsetzen. $\Rightarrow$ Man erhält den Ortsvektor des zugehörenden Punktes

Umgekehrte Richtung: Man erhält r und s wenn P in E liegt. $\Leftarrow$ Den Ortsvektor eines Punktes einsetzen **= Punktprobenmethode**

Beispiel a) Liegt $P_1(12\,|-5\,|\,11)$ in der Ebene E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$?

Ortsvektor von P_1 einsetzen: $\begin{pmatrix}12\\-5\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$

Das sind 3 Gleichungen für r und s:

$$\left\{\begin{array}{l}12=0+6r+s\\-5=3-4r+s\\11=1+5r-5s\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}6r+s=12\\-4r+s=-8\\5r-5s=10\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

PLAN: r und s aus (1) und (2) berechnen.
Dann muss man die Probe in (3) machen, diese entscheidet dann!

Elimination von s durch (1) – (2): $10r=20\ \Leftrightarrow\ r=2$

r in (1) oder (2) ersetzen: $12+s=12\ \Leftrightarrow\ s=0$

Probe in (3): $10-5\cdot 0=10$

Weil die Probe eine wahre Aussage liefert, liegt P_1 in der Ebene E.

Beispiel b) Liegt $P_2(12\,|\,5\,|\,11)$ in der Ebene E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$?

Dieselbe Rechnung wie in a) führt auf:

$$\left\{\begin{array}{l}12=0+6r+s\\5=3-4r+s\\11=1+5r-5s\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}6r+s=12\\-4r+s=2\\5r-5s=10\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

(1) – (2) führt jetzt auf: $10r=10\ \Leftrightarrow\ r=1$

r in (1) ersetzen: $6+s=12\ \Leftrightarrow\ s=6$

und die Probe in (3) liefert: $5-30=10$.

Diese falsche Aussage belegt, dass P_2 **nicht** in E liegt.